Budowa Autostrady
Metody Obliczeniowe Optymalizacji

Iwona Głowacka i Mariusz Gromada
KSBO (K4)

22 września 2003 roku

1 Przedstawienie problemu

1.1 Wstęp

Rozwiązywany przez nas problem ma na celu minimalizację kosztów budowy autostrady na pewnym zadanym odcinku. Koszty te wynikają z konieczności niwelacji ukształtowania terenu, tak aby nowo wybudowana droga spełniała normy dotyczące maksymalnych spadków i wzniesień.

1.2 Sformułowanie problemu

Dane:

- odcinek AB o długości T,
- $c(t)$ - funkcja określona na odcinku AB zwana dalej **funkcją ukształtowania terenu** (np. wysokość npm.) $c(0) = a$, $c(t) = b$,
- b_1, $b_2 > 0$ - ograniczenia na pochodne (normy dotyczące maksymalnych spadków i wzniesień).

Problem 1.1 (budowa autostrady) *Należy wyznaczyć funkcję $y(t)$* ***wysokość budowanej drogi*** *minimalizując koszty wynikające z konieczności niwelacji ukształtowania terenu:*

$$\min \int_0^T |y(t) - c(t)| dt$$

przy ograniczeniach na pochodne:

$$|y'(t)| \leqslant b_1 \qquad |y''(t)| \leqslant b_2$$

Przedstawiony problem zalicza się do klasy problemów programowania nieliniowego z ograniczeniami.

1.3 Rozwiązanie problemu

1.3.1 Dyskretyzacja

Oryginalny problem zastąpimy problemem dyskretnym. Podzielmy przedział $[0, T]$ na K równych części. Przyjmijmy następnie, że $y_1 = y$ i $y_2 = \dot{y}$. Rozważmy teraz zagadnienie minimalizacji:

$$\min \sum_{k=1}^{K} |y_{1,k} - c_k|$$

przy ograniczeniach:

$$y_{1,k} - y_{1,k-1} = y_{2,k-1}$$
$$-b_1 \leqslant y_{2,k} \leqslant b_1$$
$$-b_2 \leqslant y_{2,k} - y_{2,k-1} \leqslant b_2$$
$$y_{1,0} = a \quad y_{1,K} = b$$

1.3.2 Wybrane metody rozwiązania

Do rozwiązania problemu zastosowaliśmy dwie metody, które uważane są z najbardziej uniwersalne i stosunkowo proste w realizacji komputerowej:

1. Metodę **zewnętrznej funkcji kary**.
2. Metodę **funkcji barierowej** (wewnętrznej funkcji kary).

1.4 Opis metod rozwiązania

Podstawowa idea metod funkcji kary polega na tym, żeby problem optymalizacji z ograniczeniami zastąpić ciągiem kolejno rozwiązywanych problemów pomocniczych,w których ograniczenia w ogóle nie występują (metoda zewnętrznej funkcji kary), albo uwzględnienie jest mało kłopotliwe. Konstruowanie i rozwiązywanie kolejnych problemów pomocniczych można na ogól ciągnąć dowolnie długo. Przy odpowiednich założeniach otrzymany w rezultacie ciąg rozwiązań jest zbieżny do rozwiązania optymalnego pierwotnego problemu z ograniczeniami.

1.4.1 Metoda zewnętrznej funkcji kary

Dane: Zadanie programowania nieliniowego:

$$z = f(x) \to \min$$

przy ograniczeniach:

$$g_i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \dots, m$$
$$h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

To zadanie zastępujemy innym zadaniem, już bez ograniczeń:

$$C(x, r) = f(x) + \frac{1}{r} P(x) \to \min$$

w którym $P(x)$ jest tzw. **funkcją kary**. Można powiedzieć, że funkcja ta reprezentuje „karę" za przekroczenie ograniczeń lub zbliżenie się do nich.

Typowa funkcja kary ma następującą postać:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} \max[g_i(x), 0]^{(1+\varepsilon)} + \sum_{i=1}^{n} h_i(x)^2$$

Funkcja C(x,r) jest minimalizowana w procesie iteracyjnym dla ciągu:

$$r_1 > r_2 > \ldots > r_k, \quad \lim_{k \to \infty} r_k = 0$$

Na ogół przyjmuje się $r_1 = 1$, lub takie aby funkcja $C(x, r_1)$ była dobrze wyskalowana (aby człony $f(x)$ i $\frac{1}{r}P(x)$ miały taki sam rząd wielkości).
Można również zauważyć, że w obszarze rozwiązań dopuszczalnych, gdzie ograniczenia $g_i(x)$ i $h_i(x)$ są spełnione, kara jest równa 0, a po przekroczeniu granicy obszaru zaczyna wzrastać z intensywnością zależną od r.

1.5 Metoda funkcji barierowej

W niektórych zadaniach optymalizacji nawet niewielkie przekroczenie granicy obszaru rozwiązań dopuszczalnych nie może być zaakceptowane. Wówczas można zastosować tzw. metodę funkcji barierowych. **W zagadnieniach rozwiązywanych tą metodą nie mogą występować ograniczenia równościowe**.

Zadanie minimalizacji z ograniczeniami zastępujemy zadaniem bez ograniczeń:

$$D(x, r) = f(x) + rB(x) \rightarrow \min$$

Typowa funkcja barierowa ma postać:

$$B(x) = -\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(x)}$$

Funkcja D(x,r) jest minimalizowana w procesie iteracyjnym dla ciągu:

$$r_1 > r_2 > \ldots > r_k, \quad \lim_{k\to\infty} r_k = 0$$

Ciąg r_k może być zbudowany na zasadzie:

$$r_{k+1} = r_k 10^{-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

1.6 Szkic algorytmu

1. Dobierz punkt startowy x_0
2. Określ początkową wartość współczynnika przybliżeń r_1
3. Stosując dowolną metodę dokonaj minimalizacji funkcji celu nowego zadania bez ograniczeń.
4. Otrzymany punkt podstaw w miejsce x_0
5. Zbadaj czy spełnione zostało kryterium stopu.

Punkt startowy x_0 powinno dobierać się tak, aby spełnione były ograniczenia zagadnienia (czyli punkt x_0 powinien należeć do zbioru rozwiązań dopuszczalnych).

Początkową wartość współczynnika przybliżeń r_1 powinna być dobrana tak, aby funkcja celu byłą dobrze wyskalowana.

Przy minimalizacji funkcji celu należy zastosować dowolną metodę minimalizującą funkcję beż ograniczeń. Są to najczęściej metody znajdujące minimum lokalne funkcji zaczynając od pewnego punktu startowego. Metody te dzielą się na dwie grupy:

- **metody poszukiwań prostych**,
- **metody kierunków poprawy**.

2 Implementacja metod

2.1 Środowisko programistyczne

Do implementacji metod wykorzystaliśmy środowisko **MATLAB 6.5**. Oto pliki źródłowe:

- **moo.m** - program główny,
- **c.m** - implementacja funkcji ukształtowania terenu,
- **ck.m** - funkcja ukształtowania terenu w $k-tym$, punkcie,
- **dk.m** - oblicza współrzędną $k-tegopunkty$,
- **g1.m** - ograniczenie nierównościowe 1,
- **g2.m** - ograniczenie nierównościowe 2,
- **g3.m** - ograniczenie nierównościowe 3,
- **g4.m** - ograniczenie nierównościowe 4,
- **h1.m** - ograniczenie równościowe 1,
- **h2.m** - ograniczenie równościowe 2,
- **h3.m** - ograniczenie równościowe 3,
- **fco.m** - pierwotna funkcja celu,
- **fc.m** - funkcja celu przy metodzie zewnętrznej funkcji kary,
- **fcb.m** - funkcja celu przy metodzie funkcji barierowych,
- **P.m** - zewnętrzna funkcja kary,
- **B.m** - funkcja barierowa.

Aby zobaczyć efekt działania programu wystarczy uruchomić jedynie plik moo.m. Oczywiście wszystkie inne wymienione tutaj pliki muszą znajdować się w tym samym katalogu co plik moo.m.

Program w wyniku generuje kilka wykresów, których zadaniem jest przedstawienie istoty problemu (**ścieżki poszukiwań**). Wykresy te mają obrazować charakter zbieżności kolejnych rozwiązań do rozwiązania optymalnego.

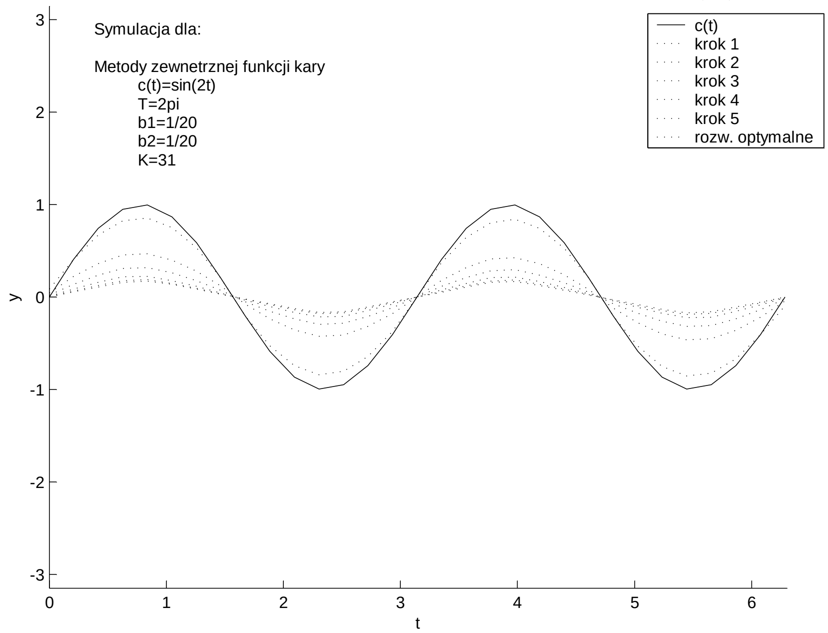
Na następnej stronie znajdują się opis i analiza wyników (również w formie graficznej).

Podczas implementacji metody wykorzystującej funkcję barierową napotkaliśmy na problem występujących ograniczeń równościowych. Jak wiemy przy tej metodzie takich ograniczeń nie powinno być. Potraktowaliśmy je więc jako ograniczenia nierównościowe.

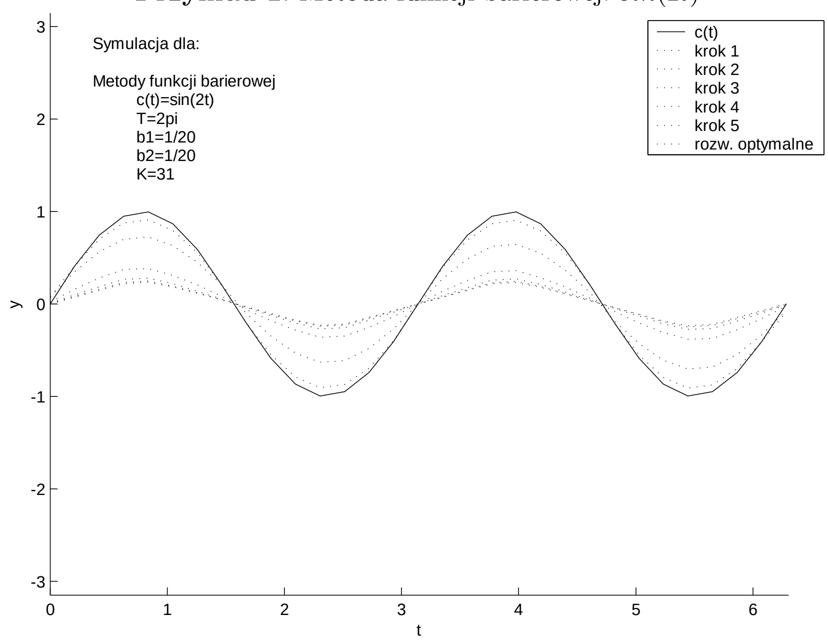
2.2 Analiza wyników - ścieżki poszukiwań

Przeprowadzimy analizę porównawczą dwóch opisanych wcześniej metod.

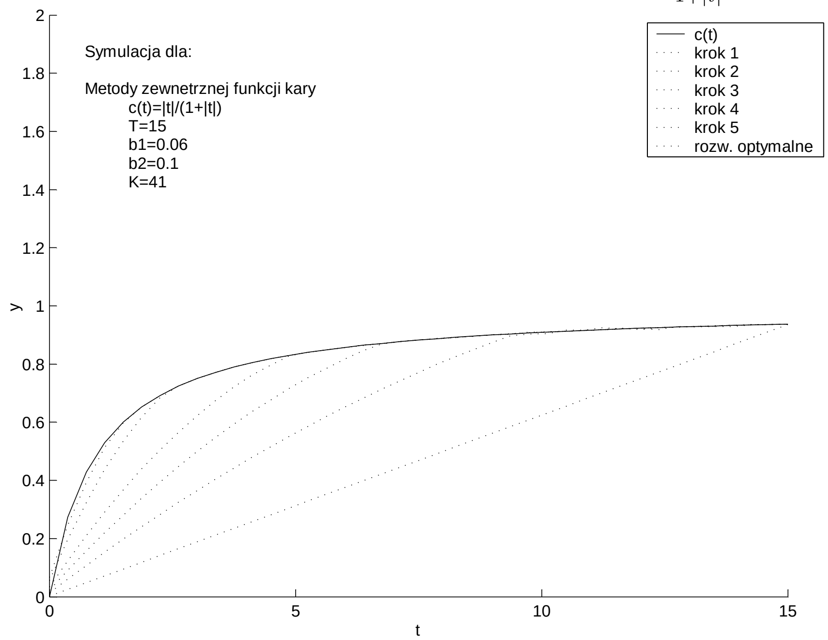
Przykład 1: Metoda zewnętrznej funkcji kary: $sin(2t)$



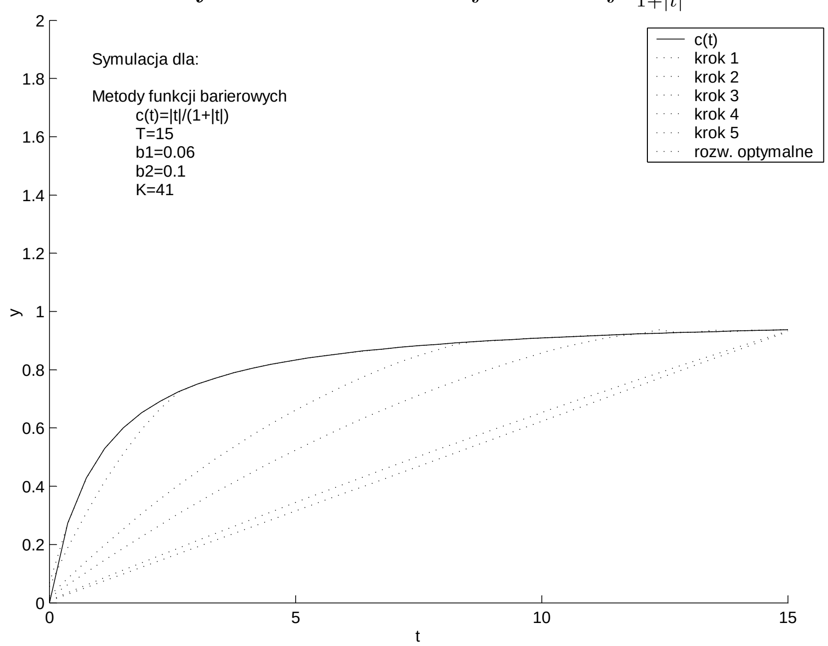
Przykład 1: Metoda funkcji barierowej: $sin(2t)$



Przykład 2: Metoda zewnętrznej funkcji kary: $\frac{|t|}{1+|t|}$



Przykład 2: Metoda funkcji barierowej: $\frac{|t|}{1+|t|}$



3 Wnioski

Podczas analizy problemu wykorzystaliśmy kilka różnych funkcji opisujących możliwe ukształtowanie terenu. Dwie zastosowane metody w końcowym rezultacie dały bardzo podobne wyniki. Ciekawa jest też obserwacja wpływu parametrów problemu na działanie metod (szczególnie dla pierwszej pochodnej). W symulacja podawaliśmy dość małe ograniczenia na pochodną. Intuicyjnie świadczy to o "płaskim" charakterze rozwiązania. Na takie rozwiązanie wskazały również symulacje. Można się o tym przekonać analizując przykład 1. Również bardzo istotnym elementem jest punkt startowy, przy czym przy zastosowaniu metody funkcji barierowej, punkt ten musi należeć do zbioru rozwiązań dopuszczalnych.

Literatura

[1] Karol Krajewski: *Metody optymalizacji w inżynierii środowiska.*

[2] W. Findeisen, J. Szymanowski, A. Wierzbiski: *Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji.*

[3] A. Zalewski, R. Cegieła: *Matlab - obliczenia numeryczne i ich zastosowanie.*