

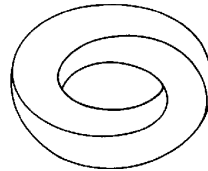
METEOROLOGIA JAKO NAUKA, KTÓRA DAŁA POCZĄTEK MATEMATYCZNEJ TEORII CHAOSU

MARIUSZ GROMADA

MARZEC 2003

mariusz.gromada@wp.pl

<http://multifraktal.net>



1 Eksperyment Lorenza

Zdumiewający może być fakt, że podstawy matematycznej teorii chaosu wyrosły na gruncie meteorologii. Wystarczy spojrzeć na nieprzewidywalność pogody. Dziś w erze lotów kosmicznych człowiek nie potrafi podać dokładnej temperatury, siły i kierunku wiatru, czy wilgotności powietrza na konkretną godzinę dowolnego dnia. Wszelkie prognozy w dłuższych odcinkach czasu są bezużyteczne, a te na najbliższe chwile są wyłącznie przybliżone. Warto powiedzieć również o wielkich kataklizmach, takich jak: huragany, powodzie czy trzęsienia ziemi. Zwykle ostrzeżenie o możliwości ich wystąpienia są publikowane w chwili, kiedy stały się już faktem. Wszystko to skłania dzisiejszego człowieka do pokory wobec natury, a współczesnego matematyka do zadumy nad istotą owych zjawisk.

Jak na teorię chaosu przystało, jej początek był czystym przypadkiem. W 1963 r. meteorolog *Edward Lorenz* z Massachusetts Institute of Technology skonstruował prosty model. Zawarł w nim trzy równania różniczkowe, przy pomocy których chciał opisać przemiany zachodzące w atmosferze pod wpływem promieniowania słonecznego nagrzewającego powierzchnię Ziemi.

$$\dot{X} = \frac{dX}{dt} = \delta(Y - X)$$

$$\dot{Y} = \frac{dY}{dt} = rX - Y - XZ$$

$$\dot{Z} = \frac{dZ}{dt} = XY - bZ$$

Wykorzystując ówczesny komputer Lorenz uruchomił symulację. Uzyskane wyniki podawały pogodę dzień za dniem, a gromadzone dane przypominały

jej realne zmiany. Pewnego razu komputer z bliżej nieokreślonych przyczyn nie dokończył serii obliczeń. Lorenz postanowił powtórzyć eksperyment, ale nie od początku... Jako dane wejściowe przyjął jedno z kolejnych wyników obliczeń. Rozumował, że komputer powtórzy obliczenia do momentu, gdzie ostatnio przerwał i będzie je kontynuował do czasu wyznaczonego przez badacza. Niemale było zdziwienie Lorenza, gdy zauważył ogromną i zupełnie nieprzewidywalną różnicę pomiędzy drugą a pierwszą serią obliczeń (poza kilkoma początkowymi wynikami)...

Czyżby Lorenz natknął się na dziwne zjawisko matematyczne? Te same dane wejściowe w tym samym układzie równań dają różne wyniki? Istota tego osobliwego zachowania leży w zaokrągleniach obliczanych wartości. Komputer Lorenza robił to z dokładnością do sześciu znaczących cyfr, w wydrukach natomiast pokazywał tylko trzy. Nieznaczna zatem zmiana danych wejściowych może mieć, w dostatecznie długim czasie, ogromny wpływ na wynik końcowy. Dziś wiemy, że jest to ogólna cecha równań nieliniowych, a wspomniany czas nazywany jest *czasem charakterystycznym*. Całe to wydarzenie skłania nas do bardzo ważnego wniosku - *modele oparte na dynamice nieliniowej są nieprzewidywalne*.

Niewielkie zmiany warunków początkowych, prowadzące w odpowiednio długim czasie do dużych zmian wyników końcowych, zostało nazwane „*efektem motyla*”. Motyl trzepocząc skrzydłami w Europie Wschodniej, może przyczynić się do powstania huraganu w Nowym Yorku.. Nie jest jednak możliwe określenie, który z motyli i w jakim stopniu, będzie miał wpływ na gwałtowne zmiany atmosferyczne. „Efekt motyla” należy traktować jak metaforę, służącą zobrazowaniu niestabilności procesów nieliniowych.

2 Atraktory

Słowami Michała Tempczyka: „*W pewnych warunkach nieliniowość, dzięki której następuje sprzężenie własności i działania składników układu złożonego, może prowadzić do pojawienia się nowego rodzaju uporządkowania dynamiki całości. Uporządkowanie to przejawia się w ten sposób, iż trajektorie startujące z różnych punktów przestrzeni fazowej, po pewnym czasie zbliżają się do pewnego wyróżnionego obszaru i układ zaczyna działać zgodnie z ustalonym ogólnym schematem. Taki wyróżniony wzorzec działania, porządkujący dynamikę układów danego typu, nazywany jest atraktorem. Atraktory odgrywają ważną rolę w badaniach układów dynamicznych, matematycznych i empirycznych. Atraktor jest uporządkowaniem ukrytym w działaniu ukła-*

dów bardzo skomplikowanych, dlatego nie jest łatwo wykryć go obserwując taki układ. Uczni opracowali specjalne techniki poszukiwania atraktorów w zbiorach danych opisujących różnego rodzaju procesy badane przez naukę.”

W moim odczuciu atraktory są jednymi z najbardziej fascynujących obiektów matematycznych. Atrakcyjność swą zawdzięczają wręcz niewolniczemu związkowi z teorią chaosu, która to za ich sprawą traci wiele ze swego mistycyzmu. Mówiąc inaczej, to dzięki nim możemy spojrzeć na chaos z innej perspektywy. Perspektywa ta pozwala dostrzec w chaotycznych zachowaniach pewien osobliwy porządek.

Termin ten zasadniczo wiąże się z teorią układów dynamicznych, w ogólniejszym znaczeniu należy jednak do topologii. Atraktory znajdują również zastosowanie niemal we wszystkich gałęziach matematyki.

Atraktorem nazywamy punkt lub zbiór, który w trakcie pewnego procesu „przyciąga” punkty leżące w jego otoczeniu. W ogólnej teorii systemów atraktor definiuje się jako obszar lub punkt w pewnej przestrzeni stanów, do którego system zmierza i wokół którego system pozostaje w dowolnie dużej skali czasu.

Poniżej atraktor układu składającego się z równań różniczkowych Lorentza:

